On a : $l \in [0, \frac{\pi}{4}]$, f est continue en l donc $f(l) = l \Rightarrow h(l) = 0 \Rightarrow l = 0$.

Conclusion : (U_n) est convergente vers 0.

Solution 12 :

1°/ Soit $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. f est définie, continue, dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ (−)	

d'où $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq 0$ et par suite on a : $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

- Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie, continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$ (−)	

d'où $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq 0$ et par suite on a : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

Conclusion : $\forall x \geq 0$, $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2°/a) $U_1 = \sum_{k=1}^{1} \ln(1 + \frac{k}{1^2}) = \ln 2$

$$U_2 = \sum_{k=1}^{2} \ln(1 + \frac{k}{4}) = \ln(1 + \frac{1}{4}) + \ln(1 + \frac{2}{4})$$

$$= \ln\frac{5}{4} + \ln\frac{6}{4} = \ln\frac{30}{16} \Rightarrow U_2 = \ln\frac{15}{8}$$